Комбинаторика

13 мая

(3 балла) Вася выписал на доску числа $1, 2, \ldots, 20$, каждое по одному разу. Он называет четверку выписанных чисел *красивой*, если сумма каких-то двух чисел из этой четверки равна 12, а также сумма каких-то двух чисел из этой четверки равна 28 (так, четверка 1, 11, 17, 20 — красивая, потому что $1 + 11 = 12$ и $11 + 17 = 28$). Сколько всего красивых четверок?

(5 баллов) Окружность длины $6n$ разбита точками на n дуг длины 1, n дуг длины 2 и n дуг длины 3. Докажите, что через концы некоторых двух дуг проходит диаметр этой окружности.

(8 баллов) На плоскости даны $n \geqslant 4$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что количество параллелограммов площади 1 с вершинами в этих точках не превосходит $\dfrac{n^2 - 3n}{4}$.

(13 баллов) Двадцать муравьев живут на сторонах икосаэдра (правильный многогранник с двадцатью треугольными гранями, в каждой вершине сходится 5 граней) со стороной 1 м, по одному муравью на каждой грани. Каждый муравей ползает по ребрам своей грани против часовой стрелки. Скорость каждого муравья не меньше 1 м/мин, но при этом не обязательно постоянна. Также, если два муравья встречаются, то их встреча обязательно происходит в вершине икосаэдра. Назовем *коллизией* ситуацию, при которой одновременно 5 муравьев встретились в одной вершине. Могут ли муравьи ползать по икосаэдру так, чтобы коллизий никогда не случилось?

Геометрия

13 мая

(3 балла) Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а её диагонали — в точке Q. Известно, что описанная окружность треугольника PBC касается средней линии трапеции. Биссектриса угла P пересекает AD в точке K. Докажите, что $KQ \perp AD$.

(5 баллов) Обозначим через O центр описанной окружности треугольника ABC. На дуге BC описанной около треугольника BOC окружности, не содержащей точку O, выбрана точка F. Описанная окружность треугольника BAF вторично пересекает прямую AC в точке P. Описанная окружность треугольника CAF вторично пересекает прямую AB в точке Q. Прямые BP и CQ пересекаются в точке K. Докажите, что прямые AK, OF и BC пересекаются в одной точке.

(8 баллов) Дан неравнобедренный треугольник ABC. На сторонах AB и BC нашлись такие точки P и Q соответственно, что $AP = PQ = QC$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке B пересекает прямую PQ в точке R. Докажите, что R равноудалена от B и центра I вписанной в треугольник PBQ окружности.

(13 баллов) В треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке H, а M — середина стороны AC. Описанные окружности треугольников AHC и A_1C_1M пересекаются в точках P и Q. Докажите, что прямые A_1C_1, PH и MQ пересекаются в одной точке.

Алгебра и Теория чисел

13 мая

(3 балла) Петя придумал действительные числа a, b, c и сообщил про них Васе, что $a^2+b^2+c^2+abc=5$ и $a+b+c=3$. Может ли Вася назвать число, которое равно одному из придуманных Петей?

(5 баллов) Обозначим через $S(n)$ сумму цифр десятичной записи числа n. Назовём натуральное число k *хорошим*, если существует такая константа $M(k)$, что $\frac{S(n)}{S(nk)} < M(k)$ для любого натурального n. Известно, что различные числа b_1, b_2, $\ldots$, b_m — хорошие. Докажите, что

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_m} < \frac{5}{2}.$$

(8 баллов) Найдите все многочлены $p(x)$ с действительными коэффициентами для которых выполнено следующее условие: существует многочлен $q(x)$ с действительными коэффициентами такой, что для любого натурального n выполнено:

$$p(1)+p(2)+p(3)+\ldots+p(n) = p(n)\cdot q(n).$$

(13 баллов) Дано натуральное число n. Известно, что $\{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ — множество чисел, меньших n и взаимно простых с n. Оказалось, что любой простой делитель числа m является делителем числа n. Докажите, что для любого натурального k число $a_1^k+a_2^k+\ldots+a_m^k$ делится на m.

Кот в мешке

13 мая

1. При каких значениях параметра a уравнение

$$7x^6 - 21x^5 + 36x^4 - 37x^3 + 36x^2 - 21x + 7 = ax^2(x-1)^2$$

имеет не более трёх различных действительных корней?

2. Угол между диагоналями трапеции равен 60°. Докажите, что сумма её боковых сторон не меньше большего из оснований.

3. У коллекционера есть замечательная коллекция из n статуэток. Он притворяется ценителем искусства и делает вид, что различает на вид любые две из них. На самом же деле он не различает никакие две. Несмотря на это, ему важно, чтобы статуэтки стояли на полке в определённом порядке. Если статуэтки стоят в нужном порядке, над полкой горит зелёная лампочка. У него есть несколько кнопок. При нажатии каждой кнопки происходит какая-то перестановка статуэток (какая именно, коллекционер, естественно понять не может, потому что он не различает статуэтки). Докажите, что коллекционер может проверить, сможет ли он, нажимая на кнопки, получить все перестановки.

4. Существует ли такая последовательность натуральных чисел $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, что:

1) a_k — k-значное число;

2) для любых $1 \leqslant l < k$ остаток числа a_k при делении на a_l — целое положительное число, меньшее 100.